



„Sterowanie optymalne statkiem w obszarze ze zmiennym
prądem – problem czasoptymalnej marszruty”

Zenon Zwierzewicz

Szczecin, 2010



**INNOWACYJNA
GOSPODARKA**
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ
ROZWOJU REGIONALNEGO



Sterowanie optymalne statkiem w obszarze ze zmiennym prądem – problem czasooptymalnej marszruty

W artykule tym przedstawimy rozwiązanie tzw. nawigacyjnego problemu Zermelo [1] w oparciu o metody teorii sterowania optymalnego (SO). Podstawowym rezultatem tej teorii jest twierdzenie znane pod nazwą ‘zasady maksimum Pontriagina’ [2] pozwalające wyznaczyć optymalny (w sensie zadanego kryterium) program sterowania obiektem (procesem) przy założeniu pełnej znajomości jego modelu dynamicznego.

Na wstępie przedstawione zostaną podstawowe fakty z teorii sterowania optymalnego w postaci ogólnych sformułowań zarówno problemu SO jak i zasady maksimum. W dalszym ciągu sformułujemy problem Zermelo - optymalnej marszruty statku (*optimal routing problem*), oraz pokażemy, że jest on szczególnym przypadkiem ogólnego zadania sterowania optymalnego.

Bazując na podanych faktach przedstawione zostanie szczegółowe rozwiązanie problemu Zermelo, najpierw w formie ogólnej (analitycznej), a następnie w wersji numerycznej (dla konkretnych danych liczbowych), włącznie z prostymi algorytmami komputerowymi w Matlabie/Simulinku [4,5].

W artykule użyto, powszechnie przyjętego w teorii sterowania, zapisu wektorowo macierzowego. Wektory i macierze oznaczono czcionką pogrubioną.

1. Problem sterowania optymalnego – pojęcia podstawowe

Niech dany będzie matematyczny model sterowanego obiektu lub procesu w postaci równania stanu:

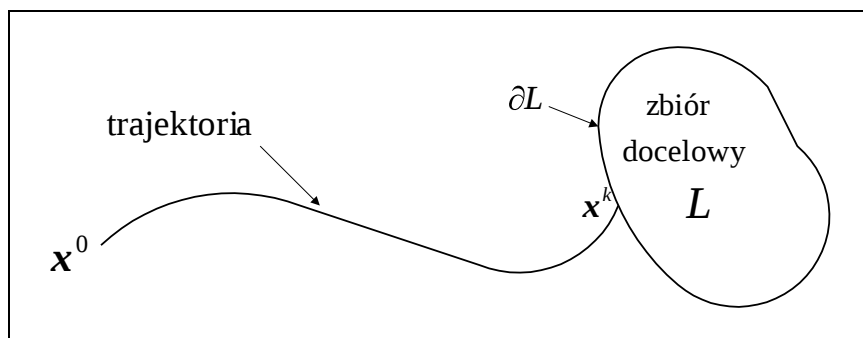
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

przy warunkach początkowych $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$,

gdzie $\mathbf{x}(t) \in D \subset \mathbb{R}^n$ jest n -wymiarowym wektorem stanu

oraz $\mathbf{u} \in U \subset \mathbb{R}^m$ reprezentuje m -wymiarowy wektor sterowań.

Zbiór D jest obszarem, natomiast U domkniętym obszarem.



Rys. 1. Trajektoria obiektu sterowanego wraz ze zbiorem docelowym.

Dany jest ponadto domknięty zbiór $L \subset R^+ \times D$ tzw. zbiór docelowy (*target set*):

$$L = \{ \mathbf{x} : \mathbf{l}(\mathbf{x}(t)) \leq 0 \}$$

gdzie $\mathbf{l}$ - funkcja wektorowa, r -wymiarowa klasy C^1 .

Przez ∂L oznaczamy brzeg zbioru L i zakładamy, że $l_x^k \neq 0$ w otoczeniu brzegu ∂L . l_x^k oznacza tutaj gradient k -tej współrzędnej funkcji wektorowej $\mathbf{l}$; $k=1,2,\dots,r$.

Jako czas zakończenia procesu rozumiemy pierwszy moment osiągnięcia przez trajektorię stanów $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}^0, u(t))$ zbioru L :

$$t_k = \min_{t \in R^+} \{ t : \mathbf{x}(t) \in \partial L \}.$$

Miara jakości sterowania dana jest za pomocą tzw. kryterium (wskaźnika, funkcjonału) jakości (kosztu, wypłaty):

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_k} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + G(\mathbf{x}(t_k)) \quad (2.3)$$

gdzie f_0 i G są skalarnymi, nieujemnymi funkcjami klasy C^1 .

Sformułowanie problemu sterowania optymalnego:

Spośród sterowań dopuszczalnych $\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \in U$), przeprowadzających obiekt ze stanu początkowego $\mathbf{x}^0$ do zbioru docelowego L znaleźć takie, które minimalizuje wskaźnik jakości $J(\mathbf{u})$. Sterowanie takie nazywamy **sterowaniem optymalnym** i oznaczamy $\mathbf{u}^*$. Zatem

$$J(\mathbf{u}^*) = \min_{\mathbf{u} \in U} J(\mathbf{u})$$

Na składowe u_i ($i = 1, 2, \dots, m$) wektora sterowania $\mathbf{u}$, nakłada się zwykle dodatkowe warunki (ograniczenia) np., że są funkcjami przedziałami ciągłymi o wartościach ze zbioru U . Sterowania takie nazywamy sterowaniami dopuszczalnymi.

Przedstawione zadanie sterowania jest bardzo ogólne. Specyfikując występujące tu elementy możemy otrzymać typowe, często spotykane postaci zadania np.:

- biorąc funkcje $f_0=1$, $G=0$ mamy $J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_k} 1 dt = t_k - t_0$, a więc tzw. problem czasooptymalny

(znaleźć sterowanie przeprowadzające stan obiektu z punktu $\mathbf{x}^0$ do zbioru L w najkrótszym czasie),

- opuszczając zbiór docelowy L mamy problem, gdzie nie występują ograniczenia na końcowy punkt trajektorii $\mathbf{x}^k$, przy czym czas końcowy t_k (czas trwania procesu) może być tu zarówno ustalony jak i swobodny,
- biorąc układ liniowy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ z funkcjonałem jakości postaci

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{H} \mathbf{x}(t_k) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \rightarrow \min \quad (\text{gdzie } t_k \text{ jest z góry ustalony}), \text{ a}$$

następnie pomijając zbiór docelowy L oraz ograniczenia na sterowanie (tzn. biorąc $U = R^m$) dostajemy tzw. problem regulatora liniowo-kwadratowego LQR (*linear-quadratic regulator*). Dla problemu LQR możliwe jest stosunkowo łatwe uzyskanie tzw. syntezy sterowania optymalnego

czyli sterowania w sprzężeniu zwrotnym. Decyduje to o dużej wadze tego problemu zarówno w teorii jak i zastosowaniach.

2. Zasada maksimum Pontriagina

Jednym z mocniejszych narzędzi rozwiązywania zadań sterowania optymalnego jest twierdzenie znane pod nazwą 'zasady maksimum Pontriagina', którego dość ogólne sformułowanie podano poniżej. Przedtem jednak wprowadźmy pewne potrzebne pojęcia:

wektor stanu sprzężonego:

$$\mathbf{p}(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)]^T,$$

hamiltonian:

$$H(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{p}(t) \circ \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

gdzie

$$\mathbf{p} \circ \mathbf{f} = p_1 f_1 + p_2 f_2 + \dots + p_n f_n; \quad \text{tzn. } \circ - \text{oznacza mnożenie skalarne.}$$

Twierdzenie (zasada maksimum)

Jeśli w sformułowanym problemie sterowania optymalnego $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(t)$ i $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t)$ oznaczają odpowiednio sterowanie optymalne i odpowiadającą mu trajektorię wychodzącą z zadanego stanu początkowego $\mathbf{x}^0$, to istnieje wtedy niezerowa funkcja wektorowa $\mathbf{p}(t)$ (trajektoria sprzężona) spełniająca wraz z $\mathbf{x}^*$ i $\mathbf{u}^*$ następujące warunki:

- równanie stanu

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)); \quad \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}^0 - \text{warunki początkowe}$$

- równania stanu sprzężonego

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -H_{\mathbf{x}}(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = -H_{x_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \dot{p}_2 = -H_{x_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dot{p}_n = -H_{x_n} = -\frac{\partial H}{\partial x_n} \end{cases},$$

z warunkami transwersalności

$$\mathbf{p}(t_k) = G_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_k)) - \sum_i \lambda_i \mathbf{l}_{\mathbf{x}}^i(\mathbf{x}^*(t_k)) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{x_1} \\ G_{x_2} \\ \vdots \\ G_{x_n} \end{bmatrix} - \lambda_i \sum_i \begin{bmatrix} l_{x_1}^i \\ l_{x_2}^i \\ \vdots \\ l_{x_n}^i \end{bmatrix},$$

gdzie $\lambda_i \in \mathbb{R}$,

- przy czym sterowanie $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ maksymalizuje Hamiltonian :

$$H(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = \max_{\mathbf{u}} H(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}) \equiv 0 \quad ; \quad t \in [t_0, t_k] \quad .$$

3. Sformułowanie problemu Zermelo jako zadania sterowania optymalnego oraz jego rozwiązanie z wykorzystaniem zasady maksimum

W ramach przedstawionego powyżej ogólnego sformułowania problemu SO przedstawimy teraz problem optymalnej marszuty statku w obszarze z prądem. Oczywiście pole wektorowe reprezentujące prądy może zawierać w sobie także inne oddziaływania otoczenia na statek jak np. wpływ wiatru.

Jako model sterowanego procesu przyjmiemy kinematyczny model ruchu statku:

$$\dot{x}_1 = V \cos u + \varphi_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = V \sin u + \varphi_2(x_1, x_2)$$

gdzie:

$x_1(t), x_2(t)$ – współrzędne (pozycja) statku w czasie t ,

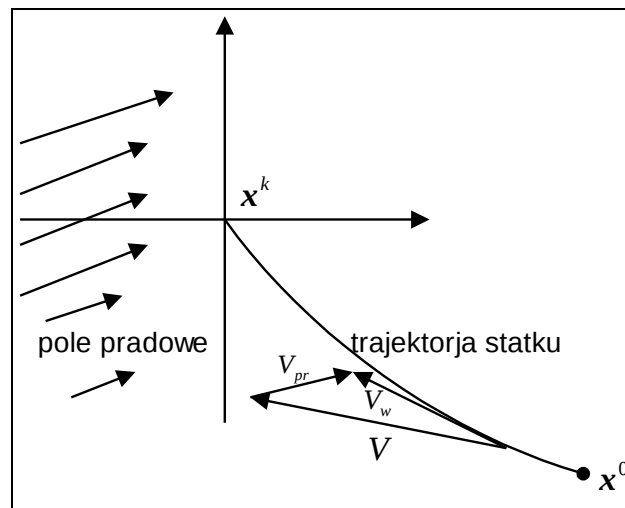
V – prędkość statku (stała) ,

u – kurs statku (zmienna sterująca) ,

$[\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)]^T$ – pole wektorowe rozkładu prądu,

$\mathbf{x}^0 = [x_1^0, x_2^0]^T$ – punkt początkowy trajektorii statku,

$\mathbf{x}^k = [x_1^k, x_2^k]^T = [0, 0]^T$ – punkt docelowy.



Rys. 2 Trajektoria statku w obszarze z silnym prądem.

Kryterium jakości – minimalny czas procesu sterowania:

$$J(u) = \int_0^{t_k} 1 dt = t_k \rightarrow \min$$

Zbiór punktów docelowych:

$$L = \{ (x_1, x_2) : l^1(x_1, x_2) = 0, l^2(x_1, x_2) = 0 \} = \{ (x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 = 0 \}.$$

Hamiltonian systemu:

$$H = [p_1(t), p_2(t)] \circ [V \cos u + \varphi_1, V \sin u + \varphi_2] - 1,$$

lub

$$H = \{ p_1(V \cos u + \varphi_1(x_1, x_2)) + p_2(V \sin u + \varphi_2(x_1, x_2)) - 1 \} = 0.$$

Równania stanu sprzężonego:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -H_{x_1}(\mathbf{p}, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \Leftrightarrow \dot{p}_1 = -H_{x_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -p_1 \cdot \varphi_{1x_1}(x_1, x_2) - p_2 \cdot \varphi_{2x_1}(x_1, x_2) \\ \dot{p}_2 &= -H_{x_2}(\mathbf{p}, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \Leftrightarrow \dot{p}_2 = -H_{x_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \cdot \varphi_{1x_2}(x_1, x_2) - p_2 \cdot \varphi_{2x_2}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Warunki transversalności:

$$\mathbf{p}(t_k) = G_x - \lambda_1 \cdot l_x^1 - \lambda_2 \cdot l_x^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = -\lambda \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix},$$

czyli

$$\mathbf{p}(t_k) = \begin{bmatrix} p_1(t_k) \\ p_2(t_k) \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

Maksymalizując hamiltonian w czasie t_k możemy otrzymać λ jak również wartość $u^*(t_k)$. W tym celu pisząc hamiltonian:

$$\max_u H(t_k) = \max_u -\lambda V[\cos \alpha, \sin \alpha] \circ [\cos u, \sin u] - \lambda(\varphi_1 \cos \alpha + \varphi_2 \sin \alpha) - 1 = 0,$$

widzimy, że $H(t_k)$ osiąga maksimum ze względu na u , gdy wektory $\vec{a} = [\cos \alpha, \sin \alpha]$ i $\vec{b} = [\cos u, \sin u]$ będą kolinearne tzn. $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Wtedy iloczyn skalarny $\vec{a} \circ \vec{b} = \pm 1$, zatem (biorąc $\vec{a} \circ \vec{b} = -1$) mamy:

$$\begin{aligned} u^*(t_k) &= \alpha + \pi, \\ \lambda &= \frac{1}{V - \varphi_1 \cos \alpha - \varphi_2 \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Stąd, wartości współrzędnych $\mathbf{p}(t_k)$ wynoszą:

$$\begin{aligned} p_1(t_k) &= -\cos \alpha / (V - \varphi_1 \cos \alpha - \varphi_2 \sin \alpha) \\ p_2(t_k) &= -\sin \alpha / (V - \varphi_1 \cos \alpha - \varphi_2 \sin \alpha) \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu równań sprzężonych czyli uzyskaniu funkcji $p_1(t)$, $p_2(t)$ w całym przedziale $[0, t_k]$ maksymalizujemy w tym przedziale hamiltonian:

$$\max_u H(t) = \max_u \{ V[p_1(t), p_2(t)] \circ [\cos u, \sin u] + p_1 \varphi_1(x_1, x_2) + p_2 \varphi_2(x_1, x_2) - 1 \} = 0.$$

Widzimy, że $H(t)$ osiąga maksimum ze względu na u gdy spełniony jest:

$$\frac{p_1}{\cos u} = \frac{p_2}{\sin u} \quad - \text{warunek kolinearności}.$$

Stąd mamy:

$$\tan u^* = \sin u / \cos u = p_2(t, t_k, \alpha) / p_1(t, t_k, \alpha)$$

lub

$$u^*(t) = \pi + \arctan(p_2/p_1).$$

Otrzymaliśmy zatem rodzinę parametryczną (parametru α) sterowań optymalnych. Startując teraz ze stanu końcowego $\mathbf{x}^k = [0, 0]^T$ i całkując równanie stanu wstecz w czasie otrzymujemy odpowiadającą rodzinę trajektorii optymalnych. Parametr α dobieramy tak, aby spełnione były również warunki początkowe $\mathbf{x}^0$. W tym celu można wykorzystać jedną ze znanych procedur numerycznych, bądź dla celów praktycznych łatwo jest to zrobić po prostu metodą prób i błędów.

4. Przykład numeryczny

W przykładzie tym ogólne rozwiązanie podane w poprzednim punkcie wyspecjalizujemy dla konkretnych danych liczbowych uzyskując w ten sposób możliwość rozwiązania numerycznego z zastosowaniem komputera. Przyjmujemy następujące dane (odległość mierzymy w milach morskich [nm], natomiast prędkość w węzłach [kn]):

punkt początkowy - $A = \mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (-1.86, 3.66) \text{ [nm]}$

zbiór punktów docelowych - $B = \mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k) = (0, 0),$

prędkość statku - $V = 0.5 \text{ kn},$

liniowo narastające pole prądowe:

$$V_{cr} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ kx_1 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } k = -0.5.$$

równania ruchu statku:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = V \cos u \\ \dot{x}_2 = V \sin u + kx_1 \end{cases},$$

kryterium jakości:

$$J(u) = \int_0^{t_k} 1 dt \rightarrow \min.$$

W celu znalezienia optymalnego sterowania kursem dokonamy następujących działań.
Budujemy hamiltonian:

$$H = [p_1(t), p_2(t)] [V \cos u, V \sin u + kx_1] - 1,$$

lub

$$H = \{p_1 V \cos u + p_2 (V \sin u + kx_1) - 1\}.$$

Warunki transversalności:

$$p(t_k) = \begin{bmatrix} p_1(t_k) \\ p_2(t_k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \alpha / V \\ \sin \alpha / V \end{bmatrix}.$$

Równania stanu sprzężonego:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -kp_2, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \Rightarrow p_2 = \text{const} = -\sin \alpha / V.$$

Całkując pierwsze równanie otrzymujemy:

$$p_1(t) = (k(t_k - t) \sin \alpha + \cos \alpha) / V,$$

stąd

$$\tan u^* = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\tan \alpha}{(k(t_k - t) \tan \alpha + 1)},$$

lub

$$u^* = \pi + \arctan \left(\frac{\tan \alpha}{(k(t_k - t) \tan \alpha + 1)} \right).$$

Zatem

$$t_k = (\cot(u^*(0) - \pi) - \cot \alpha) / k.$$

Otrzymane wyniki:

$$\alpha = 30^\circ \Rightarrow u(t_k) = 210^\circ,$$

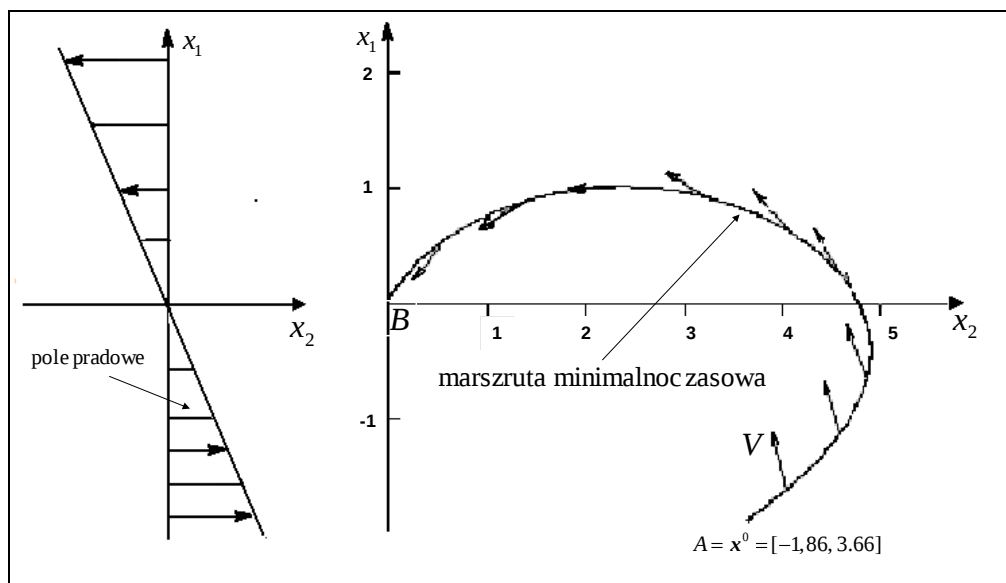
$$u^*(0) = 345^\circ,$$

oraz czas zakończenia procesu sterowania $t_k = 10.93$ h.

Dla porównania, gdyby statek płynął między punktami A i B po linii prostej bez działania prądu, zajęłoby mu to $\sqrt{3.66^2 + 1.86^2} / 0.5 = 8.21$ h., a więc stosunkowo niewiele mniej. Zaś nawigacja tego rodzaju w przypadku działania prądu jest (dla przyjętych danych) w ogóle niemożliwa, gdyż siła prądu nie pozwala na ustawienie wypadkowego wektora prędkości wzdłuż odcinka AB.

Należy tutaj przypomnieć, że kurs w nawigacji mierzony jest względem osi pionowej (północ) zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Rezultatem graficznym tych wyników jest czasominimalna trajektoria ruchu statku jak na Rys. 3.



Rys. 3. Czasominimalna marszruta startująca w punkcie A.

Powyższy wynik został uzyskany przy pomocy następującego skryptu programu Matlab:

```
% Całkowanie równań kinematyki w problemie Zermelo
% odwołanie do funkcji 'fzr'

% Parametry funkcji ode23;
x0=[0 0];

[t,x]=ode45('fzr',0,12,x0,10^(-7),1);

L=x(:,1)>-1.86;
x=x(L,:);
w=x(:,1);
z=x(:,2);
plot(z,w,3.66,-1.86,'o') ;
```

gdzie w instrukcji „ode45” odwoływano się do funkcji:

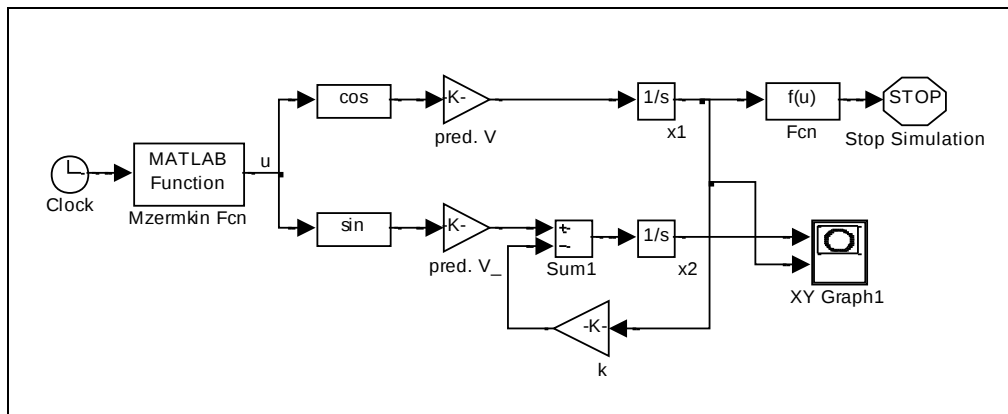
```
function rkin=fzr(t,x)
% funkcja do całkowania równań problemu nawigacyjnego Zermelo
V=0.5;
k=-0.5;
a= 30*3.14/180;
```

```

% równania kinematyki
rkin=zeros(2,1);
if (k*t*sin(a)+cos(a)) >0 ;
rkin(1)=-V*cos(pi+atan(sin(a)/(k*t*sin(a)+cos(a))));
rkin(2)=-V*sin(pi+atan(sin(a)/(k*t*sin(a)+cos(a)))-k*x(1);
else
rkin(1)=-V*cos(2*pi+atan(sin(a)/(k*t*sin(a)+cos(a))));
rkin(2)=-V*sin(2*pi+atan(sin(a)/(k*t*sin(a)+cos(a)))-k*x(1);
end

```

Alternatywnym sposobem rozwiązania numerycznego z użyciem *Simulinka* jest następujący schemat z towarzyszącym mu skryptem funkcyjnym:



Rys.4 Schemat simulinkowy realizujący czasominimalną trajektorię ruchu statku.

```

function u = mzermkkin(t)
% funkcja u=u(t) w problemie Zermello

k=-0.5; a= 30*3.14/180;
if (k*t*sin(a)+cos(a)) > 0 ;
    u = pi + atan(sin(a)/(k*t*sin(a)+cos(a)));
else
    u = 2*pi + atan(sin(a)/(k*t*sin(a)+cos(a)));
end

```

Funkcja *Fcn* - określająca warunek stopu ma oczywiście postać: $u[1] < -1.86$.

5. Uwagi końcowe

Rozwiązanie przedstawionego powyżej problemu podano także (poza oryginalną wersją [1]) w książce Brysona i Ho [2]. Jednak w obydwu przypadkach zastosowano podejście z pozycji rachunku wariacyjnego. W obecnym tutaj rozwiązaniu zastosowano sposób bardziej zorientowany na nowoczesną technikę obliczeniową, który stosunkowo łatwo można uogólnić na bardziej złożone przypadki tego problemu [6,7] (np. sytuacja z ograniczeniami przestrzeni stanów, gdzie dodatkowo należy omijać np. mielizny, domeny obcych statków, obszary silnych burz i sztormów etc.). Znacznie bardziej zaawansowany problem optymalnej nawigacji, gdzie zastosowano zasadę maksimum, podano w pracy [8]. Problem dotyczył dynamicznego sterowania statkiem w procesie unikania kolizji oraz propozycji automatycznego, inteligentnego systemu antykolizyjnego.

Literatura

- [1] Zermelo E.: *Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung* Z. Angew. Math. Mech. Bd.11, no. 2, 1931.
- [2] Bryson A.E., Ho Y.C.: *Applied optimal control*. Blaisdel Publ. Co. 1969.
- [3] Pontryagin L.S., Boltyanskii W.G., Gamkrelidze R.W., Mishchenko E.F.: *Matematicheskaja teorija optimalnych procesow*. Izd. "Nauka", Moskwa, 1983.
- [4] Mrozek B., Mrozek Z.: *Matlab 5.x, Simulink 2.x, PLJ*, 1998.
- [5] Zalewski A., Cegiela R.: *Matlab – obliczenia numeryczne i ich zastosowania*. Wyd. Nakom, Poznań 1996.
- [6] Zwierzewicz Z.: *On a Computer Oriented Analytical Method for Solving Optimal Control Problems via Maximum Principle - Zermello Navigational Problem*. Third International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, 10-13 Wrzesień, 1996.
- [7] Abramowski T., Abramowski P., Zwierzewicz Z.: *Formal solution of ship weather routing problem via Pontryagin's maximum principle*, Sintesis Tecnologica, Universidad Austral de Chile 2004.
- [8] Zwierzewicz Z.: *On a computer controlled collision avoidance* European Control Conference ECC 97, 1-4 July 1997 Brussels, Belgium.